**§ 2. Дифференцирование и интегрирование оригиналов и изображений**

**п. 1.** **Дифференцирование оригинала**

***Теорема 1* *(дифференцирование оригинала)*.**

Если  – функции-оригиналы, и , то

,

,

, (1)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

,

при этом под  понимается .

***Замечание.*** Если , то .

***Пример 1.*** Найти изображение дифференциального выражения

 если .

***Решение*.**

▲ По формуле (1) имеем:

;

.

Тогда

. ▲

***Пример 2.*** Найти изображение функции .

***Решение*.**

▲ Пусть . Тогда . Но , а . Значит , следовательно, . ▲

**п. 2.** **Дифференцирование изображения**

***Теорема 2* *(дифференцирование изображения)*.** Если , то

, (2)

т.е. дифференцированию изображения соответствует умножение его оригинала на . В общем случае

. (3)

***Пример 3.*** Найти изображение оригинала 

***Решение*.**

▲ Так как , то . ▲

***Пример 4.*** Найти изображения функций: а) ; б) ; в) .

***Решение*.**

▲ а) Т.к. , то в силу свойства дифференцирования изображения (теорема 2) имеем:

, т.е. .

Далее находим: , т.е.  Далее продолжая дифференцирование получим: .

б) С учетом свойства смещения, имеем: 

в) Согласно формуле (7) из §1 имеем: . Следовательно,

, т.е.  или .

**п. 3.** **Интегрирование оригинала**

***Теорема 3* *(интегрирование оригинала)*.** Если , то

, (4)

т. е. интегрированию оригинала на промежутке от 0 до *t* соответствует деление его изображения на *p*.

***Пример 5.*** Найти оригинал  по его изображению .

***Решение*.**

▲ Так как , то  Тогда  ▲

**п. 4.** **Интегрирование изображения**

***Теорема 4* *(интегрирование изображения)*.** Если  и интеграл  сходится, то

. (5)

***Пример 6.*** Найти изображение функции  .

***Решение*.**

▲ Так как , то . ▲

**п. 5.** **Свертка оригиналов и ее свойства. Теорема о свертке**

***Определение*.** *Сверткой* двух оригиналов  и  называется функция

. (6)

Операция свертывания функций обладает свойством коммутативности, т.е. .

***Теорема 5* *(об умножении изображений или о свертке).*** Если , , то

, (7)

т.е. свертке оригиналов соответствует произведение их изображений.

***Пример 7.*** Найти оригинал, соответствующий изображению .

***Решение*.**

▲ Представим в виде произведения изображений:

 Так как , а , то

 ▲

**п. 6.** **Интеграл Дюамеля**

С помощью теоремы о свертке может быть получена еще одна полезная формула. Пусть , . Представим следующим образом произведение :

.

Первое слагаемое является изображением функции . Выражение в квадратных скобках имеет оригиналом производную . Следовательно, второе слагаемое изображает свертку функций  и . По теореме линейности получаем

. (8)

Интеграл, стоящий в правой части формулы (8), называется интегралом Дюамеля, а сама формула (8) – формулой Дюамеля. В частности, ее можно применять для отыскания оригиналов по их изображениям.

***Пример 8.*** Найти оригинал, соответствующий изображению .

***Решение*.**

▲ Преобразуем изображение следующим образом:

. Если положить  , то получим левую часть формулы Дюамеля. Но , а . Применяя формулу Дюамеля, получаем:



. ▲

**п. 7.** **Таблица оригиналов и изображений**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Оригинал | Изображение |
| 1 | **1** |  |
| 2 |  |  |
| 3 | *t* |  |
| 4 | sin *ωt* |  |
| 5 | cos *ωt* |  |
| 6 | sh *ωt* |  |
| 7 | ch *ωt* |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |
| 10 |  |  |
| 11 |  |  |
| 12 | (*n –* целое) |  |
| 13 |  |  |
| 14 |  |  |
| 15 |  |  |
| 16 |  |  |
| 17 |  |  |
| 18 |  |  |
| 19 |  |  |
| 20 |  |  |
| 21 |  |  |
| 22 |  |  |
| 23 |  |  |

**п. 8.** **Нахождение оригинала по изображению**

Для нахождения оригинала  по его изображению  применяются *теоремы разложения*, таблица оригиналов и их изображений, а также свойства преобразования Лапласа.

***Теорема 6 (Первая теорема разложения)*.** Если функция  является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки  и ее разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид



то функция



является оригиналом, соответствующим изображению , т. е.

 .

***Теорема 7 (Вторая теорема разложения)*.** Если изображение  является дробно-рациональной функцией от аргумента  и  – простые или кратные полюсы этой функции, то оригинал , соответствующий изображению , определяется по формуле , т.е.

.

***Пример 9.*** Найти оригиналы для функций:

а) ; б) .

***Решение*.**

▲ а) Используем типовое разложение .

Тогда

 .

Следовательно, на основании теоремы 6, имеем: .

б) Запишем разложение функции  в ряд Лорана в окрестности точки :

 , где , т.е. . Следовательно,  т.е. . ▲

На практике отыскание функции-оригинала обычно проводят по следующему алгоритму: 1) по таблице оригиналов и изображений для заданного изображения  пытаются отыскать соответствующий ему оригинал; 2) функцию  стараются представить в виде суммы простейших рациональных дробей, а затем, используя свойство линейности, найти оригинал; 3) использовать теоремы разложения, формулу Дюамеля и т.д.

Рассмотрим *ряд приемов* отыскания оригинала.

1. *Если изображение отличается от табличного на постоянный множитель, то его стоит умножить и одновременно разделить на этот множитель, а затем воспользоваться свойством линейности*.

***Пример 10.*** Найти оригинал по его изображению:

а) ; б) .

***Решение*.**

▲ а) Представим изображение в виде  и воспользуемся формулой 13 из таблицы оригиналов и изображений при  . Получим: .

б) Представим изображение в форме  и используем формулу 6 из таблицы. В результате получим . ▲

**2)** *Изображение, заданное в виде дроби , разлагается на сумму дробей*.

***Пример 11.*** Найти оригинал по его изображению:

а) ; б) .

***Решение*.**

▲ Представим дроби в виде двух слагаемых, а затем воспользуемся свойством линейности и таблицей оригиналов и изображений.

а) ;

б) . ▲

1. *Если знаменатель дроби содержит квадратный трехчлен, то в нем выделяется полный квадрат*: . *При этом числитель дроби представляется в виде многочлена от* .

***Пример 12.*** Найти оригинал по его изображению:

а) ; б) .

***Решение*.**

▲ Выделим полный квадрат в знаменателе дроби и воспользуемся таблицей оригиналов и изображений.

а)  (здесь воспользо-вались формулой 8 таблицы);

б) 

.

По формулам 10,11 таблицы получим:

. ▲

1. *Если изображение представляет собой правильную рациональную дробь, то ее следует разложить на сумму простейших дробей и для каждой из них найти оригинал*.

***Пример 13.*** Найти оригинал по его изображению:

а) ; б) .

***Решение*.**

▲ а) Представим  в виде

,

где  – неопределенные коэффициенты. Приводя к общему знаменателю выражение в правой части последнего равенства, получим:

.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях , получим систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов:

.

Решая ее, получим: . Следовательно,

.

По формулам 1, 8, 9 из таблицы оригиналов и изображений находим:

.

б) Представим  в виде

,

где  – неопределенные коэффициенты.

Отсюда

.

Подставляя последовательно , получаем   и поэтому .

По формулам 2, 13 из таблицы оригиналов и изображений находим:

. ▲

**п. 9.** **Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом**

Пусть требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

, (1)

удовлетворяющее начальным условиям

[](#_Hlk28861301),

где  – заданные числа.

Будем считать, что заданная функция  и искомая функция  вместе с ее производными являются оригиналами.

Пусть , . Используя свойства дифференциро-вания оригинала и линейности, перейдем в уравнении (1) от оригиналов к их изображениям:

.

Полученное уравнение называют *операторным* или *уравнением в изображениях*. Разрешим его относительно :



,

т. е. , где  – алгебраические многочлены от аргумента  степени  и  соответственно.

Из последнего уравнения находим

. (2)

Полученное равенство называется *операторным решением* дифференциального уравнения (1). Оно имеет более простой вид, если все начальные условия равны нулю, т. е. . В этом случае .

Найдя оригинал , соответствующий изображению (2), получаем частное решение уравнения (1).

***Замечание***. Во многих случаях полученное таким образом решение  оказывается справедливым для всех значений , а не только для .

***Пример 14.*** Решить операционным методом дифференциальное уравнение:

а) ; б) .

***Решение*.**

▲ а) Перейдем от оригиналов к изображениям. Пусть . Тогда, по теореме о дифференцировании оригинала, имеем:

; .

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим уравнение в изображениях (операторное уравнение):

.

Отсюда получаем

.

Находим оригинал  для функции . Для этого раскладываем каждую из дробей на сумму простейших и, используя метод неопределенных коэффициентов, находим эти коэффициенты:

;

.

Таким образом,

.

Следовательно,

.

б) Перейдем от оригиналов к изображениям. Пусть . Тогда

;

;

.

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем операторное уравнение:

.

Отсюда

.

Находим оригинал  для функции : . ▲